

УДК 551.51:519.6:504.064.2

**УРАВНЕНИЯ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ
И ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЫ В ЗАДАЧАХ
РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОЛОГИИ****Калажоков Х.Х., Увижева Ф.Х.**

*Институт информатики и проблем регионального управления – филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»,
Нальчик, e-mail: iipru@rambler.ru*

В данной работе рассматриваются основные направления анализа экологических характеристик атмосферы локальных и глобальных масштабов. На основе анализа результатов вычислительных экспериментов по исследованию динамики крупномасштабных атмосферных процессов в рамках уравнений квазигеострофической и гидростатической модели атмосферы показывается возможность их применения для решения задач региональной экологии. Рассмотрены задачи экологии в региональном масштабе, где для определения полей течения и турбулентных характеристик атмосферы используются математические модели динамики атмосферных процессов в квазигеострофическом и гидростатическом приближениях. Краевые условия заданы в первом приближении на поверхности земли и на верхней границе тропосферы для вертикальной составляющей скорости. Представлена математическая постановка задачи переноса экологически вредных примесей в атмосфере региона в виде трехфазных аэрозолей, в предположении, что дисперсная компонента аэрозолей представляет собой жидкие капли и твердые частицы полидисперсного спектра по величине, размеру частиц. Предложена математическая формулировка задачи совместного краткосрочного прогноза погоды и прогноза экологической обстановки в регионе. В методической основе численной реализации предложенного подхода к постановке задач прогноза экологической обстановки региона лежат различные варианты представления исходной сложной задачи в виде последовательности простых задач с применением так называемых методов расщепления сложных задач. Для решения основных задач региональной экологии предложен также спектральный вычислительный метод Галеркина, позволяющий получить приближенные решения для широкого класса исследуемых задач с использованием меньшего количества оперативной памяти и за меньшее количество шагов без существенной потери точности.

Ключевые слова: региональная экология, уравнения термогидродинамики, квазигеострофическая и гидростатическая атмосфера, анализ и прогноз экологической обстановки, спектральный метод Галеркина, метод расщепления

**EQUATIONS OF THERMOHYDRODYNAMICS OF A QUASI-GEOSTROPHIC
AND HYDROSTATIC ATMOSPHERE IN THE PROBLEMS OF REGIONAL ECOLOGY****Kalazhokov Kh.Kh., Uvizheva F.Kh.**

Institute of Computer Science and Problems of Regional Management – branch of Federal public budgetary scientific establishment «Federal scientific center «Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», Nalchik, e-mail: iipru@rambler.ru

This article considers the main directions of the analysis of the ecological characteristics of the atmosphere of local and global scales. Based on the analysis of the results of computational experiments to study the dynamics of large-scale atmospheric processes in the framework of the equations of a quasi-geostrophic and hydrostatic model of the atmosphere, the possibility of their application to solve problems of regional ecology is shown. Ecological problems on a regional scale are considered, where mathematical models of the dynamics of atmospheric processes in quasi-geostrophic and hydrostatic approximations are used to determine flow fields and turbulent characteristics of the atmosphere. The boundary conditions are given in the first approximation on the earth's surface and on the upper boundary of the troposphere for the vertical velocity component. The mathematical formulation of the problem of the transfer of environmentally harmful impurities in the atmosphere of the region in the form of three-phase aerosols is presented, under the assumption that the dispersed component of the aerosols is liquid droplets and solid particles of the polydisperse spectrum in size, particle size. The mathematical formulation of the problem of a joint short-term weather forecast and environmental forecast in the region is proposed. The methodological basis for the numerical implementation of the proposed approach to the formulation of problems of forecasting the environmental situation in the region is based on various versions of the original complex problem in the form of a sequence of simple problems using the so-called methods of splitting complex problems. To solve the main problems of regional ecology, the Galerkin spectral computational method is proposed also, which allow obtaining approximate solutions for a wide class of problems under study using fewer RAM and in fewer steps without significant loss of accuracy.

Keywords: regional ecology, equations of thermohydrodynamics, quasi-geostrophic and hydrostatic atmosphere, analysis and forecast of the ecological situation, spectral Galerkin method, splitting method

Известно, что интенсивность загрязнения природной среды региона и величина ущерба, наносимого экономике в результате производственно-хозяйственной деятельности, зависят от конкретных экологических

характеристик рассматриваемого региона, а также от долготы, широты, высоты точек рассматриваемой местности. К настоящему времени российскими и зарубежными специалистами выполнен большой комплекс

исследований по методам анализа экологических характеристик окружающей среды.

Однако такие важные и сложные проблемы современной региональной экологии, как построение и исследование уравнения динамики переноса загрязняющих примесей в различных окружающих средах с учетом их физико-химического взаимодействия, разработка методов прогноза экологической обстановки в регионе различной заблаговременности, проведение вычислительных экспериментов по исследованию и анализу сложных экологических процессов регионального масштаба и другие, по-прежнему представляют научный и практический интерес.

Большое количество публикаций, посвященных модельным задачам локальных экологических процессов переноса пассивных и активных примесей атмосферы, составляет первое направление исследований. Эти модельные задачи бедны по физическому содержанию и описывают только распространение в атмосфере аэрозолей от различных типов источников в рамках уравнений переноса и диффузии, решаются в рамках одномерной системы при заданных скоростях (например, [1]). Исследования Г.И. Марчука и его учеников во многом положили начало моделированию мезомасштабных экологических процессов на основе уравнений термогидродинамики атмосферы с учетом физико-химических превращений примесей [2].

Второе направление исследований посвящено математическому моделированию сложных экологических процессов в атмосфере регионального и глобального масштабов с использованием полных уравнений динамических и кинетических процессов [3].

Настоящая работа посвящена приложению к экологии уравнений термогидродинамики квазигеострофической и гидростатической атмосферы. Квазигеострофические и гидростатические модели успешно используются для создания на их основе глобальных климатических моделей, гидродинамической теории краткосрочного прогноза погоды. Разработаны новые версии этих моделей, обладающие высоким пространственным разрешением и адаптированные к параллельным вычислительным системам [4–6]. Отметим, что в результате численного анализа динамики крупномасштабных атмосферных процессов с помощью квазигеострофической модели установлены механизмы формиро-

вания полей метеоэлементов в атмосфере и основные закономерности атмосферных процессов регионального масштаба с приемлемой точностью [7–9]. Основные спектральные алгоритмы, а также некоторые примеры приложения спектральных методов для решения актуальных задач прикладной гидродинамики, метеорологии хорошо рассмотрены и систематизированы в [10].

Одной из главных проблем, возникающих при реализации математических моделей основных задач региональной экологии, является снижение требований к ЭВМ по быстродействию и объему памяти. Вычислительные эксперименты предложенного в работе метода аналитического расщепления показывают, что полученные приближенные решения подобного класса задач можно получить быстрее и без значительной потери точности [11, 12].

Целью настоящего исследования является реализация сложных задач региональной экологии в рамках основных уравнений динамики квазигеострофической атмосферы, позволяющая уменьшить объем вычислительных работ, необходимых для их численной реализации.

Система уравнений термогидродинамики квазигеострофической и гидростатической атмосферы

В области $D = \{(t, x, y, p)\}: t > 0, -\infty < x, y < \infty, 0 < p < p_0\}$, состоящей из точек (t, x, y, p) прямоугольной системы координат, где t – время, (x, y) – пространственные горизонтальные координаты, p – давление, которое в дальнейшем играет роль вертикальной координаты, а неизвестной функцией становится изобарическая поверхность, рассматривается система уравнений термогидродинамики квазигеострофической и гидростатической атмосферы [13], которая после некоторых упрощающих преобразований имеет вид

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} + \frac{1}{l} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{l^2}{p_0} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{l} (T, H) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{p_0 R} \frac{\tau}{\zeta}, \quad (2)$$

$$T = -\frac{1}{R} \zeta \frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (3)$$

Для полученной системы уравнений термогидродинамики квазигеострофической и гидростатической атмосферы нужно определить граничные условия. В этом ка-

честве будем использовать вертикальную составляющую вектора скорости τ , пространственный вид которой при $p = p_0$ имеет вид

$$\tau = \frac{p}{RT} (H_t + uH_x + vH_y).$$

Приравнивая к нулю и произведя некоторые целесообразные поставленной задаче упрощения, получим компоненты вектора скорости в виде

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial y}, v = \frac{1}{l} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Здесь и далее использованы следующие обозначения:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа, } l \text{ – параметр Кориолиса для точек земной поверхности}$$

вдали от экватора, $H = gz$ – новая неизвестная функция, g – ускорение силы тяжести, p – атмосферное давление, $\tau = \frac{dp}{dt}$ играет роль вертикальной составляющей вектора скорости, которая описывает смещение частицы воздуха относительно изобарических поверхностей, T – температура, γ_a – адиабатический градиент температуры, c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, ε – приток тепла к единице массы воздуха, который будем считать известным, R – универсальная постоянная, p_0 – среднее давление на земной поверхности, принимаемое равным 1000 мб, $\beta = \frac{\partial l}{\partial y}$ – коэффициент, учитывающий изменение параметра Кориолиса с широтой, $\zeta = \frac{p}{p_0}$, $m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{gl^2}$ и изменяются по высоте незначительно, u, v – горизонтальные составляющие вектора скорости воздуха, $(H, \Delta H)$ и (T, H) из (1) и (2) соответственно – якобианы, вычисляемые по формуле

$$(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}.$$

Некоторые краевые задачи физики квазигеострофической и гидростатической атмосферы

Для исследования физических закономерностей формирования и развития атмосферных процессов разных масштабов под влиянием различных факторов (например,

приток тепла, орография, фазовые превращения и др.) рассмотрим некоторые краевые задачи в рамках системы уравнений (1)–(3).

Задача 1. Рассмотрим систему уравнений термогидродинамики физики квазигеострофической и гидростатической атмосферы (1)–(3) с краевыми условиями:

$$\tau = \frac{p}{RT} \frac{\partial H}{\partial t} \text{ при } p = p_0, \quad (4)$$

$$\tau = 0 \text{ при } p = 0.$$

Решение задачи 1 ищется в классе функций, ограниченных на бесконечности по горизонтальным координатам. Заметим, что задача 1 моделирует атмосферные процессы в свободной атмосфере без учета влияния процессов в пограничном слое турбулентного трения.

Для количественной оценки влияния приземного пограничного трения на эволюцию метеорологических элементов в свободной атмосфере рассматривается крайняя задача:

Задача 2. Рассмотрим систему уравнений термогидродинамики физики квазигеострофической и гидростатической атмосферы (1)–(3) с краевыми условиями:

$$\tau \approx a \Delta \frac{\partial H_h}{\partial t} + p_0 \frac{\partial H_h}{\partial t} - b \Delta H_0 -$$

$$- \frac{1}{l^2} \int_0^h \left[\frac{1}{l} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right] (1 - e^{-k\zeta} \cos k\zeta) d\zeta$$

при $p = p_h$, (5)

$\tau = 0$ при $p = 0$,

где $a = \frac{1}{l} \left(h - \frac{1}{2k} \right)$, h – толщина слоя трения, выраженная в единицах давления, $k = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{l}{2\rho\mu}}$ – коэффициент турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы, $b = \frac{g}{l} \sqrt{\frac{\rho\mu}{2l}}$, где μ – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, который на практике можно определить как по данным регистрации воздушных течений, так и по данным о диффузии искусственно вводимых в атмосферу примесей.

В настоящее время выполнен большой комплекс исследований, посвященных решению модельных задач типа (1)–(4) и (1)–(3), (5) по анализу локальных процессов, необхо-

димых для реализации сложных и важных проблем. В результате этих исследований разработана оперативная схема краткосрочного прогноза погоды с применением ЭВМ и выявлено некорректное описание эволюции планетарных ультрадлинных волновых возмущений в атмосфере в квазигеострофическом и гидростатическом приближении, что представляет большой интерес в прогнозе погоды на длительный срок.

Модель переноса экологически вредных примесей в атмосфере региона

Рассмотрим модель переноса примесей, загрязняющих экологию атмосферы региона. Пусть вредные примеси представляют собой трехфазную смесь газа, жидкости и твердого вещества в виде аэрозолей.

Предположим, что дисперсная компонента аэрозолей представляет собой жидкие капли и твердые частицы полидисперсного спектра по величине, размеру (или объему) частиц.

Пусть ρ – плотность воздуха, а ρ_1, ρ_2, ρ_3 – плотности вредных примесей в виде газа, жидких капель и твердых частиц в динамической атмосфере соответственно. Рассмотрим удельные величины $q_1 = \frac{\rho_1}{\rho}$, $q_2 = \frac{\rho_2}{\rho}$, $q_3 = \frac{\rho_3}{\rho}$, удовлетворяющие соотношению $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \ll \rho$ [13].

Упрощенная простейшая модель переноса и диффузии примесей в атмосфере региона в системе координат (t, x, y, p) имеет вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial p} v p^2 \frac{\partial q_i}{\partial p} + \mu \Delta q_i + I_i, i = 1, 2, 3,$$

$$q_i = q_i^0 = \text{const}, \text{ при } t = 0, q_i = 0$$

$$\text{при } p = p_0, q_i = 0 \text{ при } p = 0,$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p}$, Δ – оператор Лапласа, v, μ – коэффициенты турбулентной диффузии примесей; u, v, τ – составляющие вектора скорости переноса примесей в атмосфере; I_i – мощности источников вредных примесей с учетом физико-химического взаимодействия примесей между собой и со средой. При определении функционального вида источников примесей учитываются выпадения тяжелых жидких и твердых вредных примесей на

поверхности земли путем учета величины вертикальной скорости частиц под действием силы тяжести в уравнениях переноса аэрозолей.

Заметим, что для задач прогноза погоды и экологии региона на сравнительно короткий срок граничные условия на поверхности земли и на верхней границе атмосферы региона будут выполняться удовлетворительно. При увеличении срока заблаговременности прогноза граничные условия могут оказаться недостаточно точными.

В этом случае граничные условия на поверхности земли можно получить на основе решения вспомогательной задачи относительно баланса примесей на границе раздела атмосфера – земля в зависимости от характера подстилающей поверхности и структуры почвы. Возможны и другие варианты постановки граничных условий переноса примесей.

Постановка задачи метода прогноза экологической обстановки в регионе

Рассмотрим постановку задачи прогноза экологической обстановки в регионе в виде двух блоков. Первый блок представляет собой задачу расчета метеорологических элементов на основе термогидродинамических уравнений в приближении квазигеострофической и гидростатической атмосферы.

Следовательно, задача, рассматриваемая в первом блоке, является методологической основой численного метода краткосрочного прогноза погоды в квазигеострофическом приближении.

Во втором блоке рассматривается задача переноса экологически вредных примесей в атмосфере региона. Совместное рассмотрение указанных двух задач представляет собой постановку задачи прогноза погоды и экологической обстановки в регионе.

Тогда полная математическая формулировка задачи совместного краткосрочного прогноза погоды и экологической обстановки в регионе в системе координат (t, x, y, p) в виде

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} + \frac{1}{l} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{l^2}{p_0} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{l} (T, H) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{p_0 R} \frac{\tau}{\zeta}, T = -\frac{1}{R} \zeta \frac{\partial H}{\partial \zeta},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial p} v p^2 \frac{\partial q_i}{\partial p} + \mu \Delta q_i + I_i, i = 1, 2, 3,$$

$$\tau = \frac{p}{RT} \frac{\partial H}{\partial t} \text{ при } p = p_0, \tau = 0 \text{ при } p = 0,$$

$$q_i = q_i^0 = \text{const} \text{ при } t = 0, q_i = 0$$

$$\text{при } p = 0 \text{ и } p = p_0.$$

Таким образом, задача краткосрочного прогноза погоды и экологической обстановки в регионе является сложной задачей прикладной математики, вычислительной математики и вычислительной техники. Решение расщепленных таким образом задач получено и подробно рассмотрено авторами в работе [14] с применением спектрального метода Галеркина.

Заключение

Широко распространенные конечно-разностные методы требуют проведения громоздких вычислений на каждом временном шаге, в каждой точке пространственной сетки, что влечет за собой значительное увеличение используемой оперативной памяти и замедление расчетов. Применение аналитических методов расщепления позволяет получить приближенные формулы решений для широкого класса задач, притом вычислительные эксперименты показывают, что проведение расчетов значительно ускоряется, притом без существенной потери точности. К расщепленным по физическим процессам, уже более простым задачам, можно применить спектральный вычислительный метод Галеркина, позволяющий получить приближенные решения поставленной задачи.

В заключение отметим, что в предложенных постановках краевые условия имеют довольно формальный характер, ибо оценка количества примесей, осевших близко к поверхности Земли, крайне специфична для каждой конкретно решаемой задачи.

Список литературы / References

1. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 448 с.
- Berlyand M.E. Modern problems of atmospheric diffusion and atmospheric pollution. L.: Gidrometeoizdat, 1975. 448 p. (in Russian).
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
- Marchuk G.I. Mathematical modeling in the environment problem. M.: Nauka, 1982. 320 p. (in Russian).
3. Марчук Г.И., Алоян А.Е. Математическое моделирование в задачах экологии. Препринт № 234. М.: ОВМ АН СССР, 1989. 36 с.

Marchuk G.I., Aloyan A.E. Mathematical modeling in ecology problems. Preprint № 234. M.: OVM AN SSSR, 1989. 36 p. (in Russian).

4. Дымников В.П. Моделирование климата и его изменений. 2015. 59 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.scert.ru/conferences/cites/2015/presentation/Presentation/School/20.06.15/2-Dymnikov.pdf> (дата обращения: 18.05.2020).

Dymnikov V.P. Modeling climate and its changes. 2015. 59 p. [Electronic resource]. URL: <http://www.scert.ru/conferences/cites/2015/presentation/Presentation/School/20.06.15/2-Dymnikov.pdf> (date of access: 18.05.2020) (in Russian).

5. Голицын Г.С., Мохов И.И., Куличков С.Н., Курганский М.В., Репина И.А., Чхетиани О.Г. Турбулентность, динамика атмосферы и климата: сборник трудов. М.: Физматкнига, 2018. 587 с.

Golicyn G.S., Mohov I.I., Kulichkov S.N., Kurganskij M.V., Repina I.A., Chhetiani O.G. Turbulence, Atmospheric and Climate Dynamics: Proceedings. M.: Fizmatkniga, 2018. 587 p. (in Russian).

6. Davies H.C. The Quasigeostrophic Omega Equation: Reappraisal, Refinements, and Relevance. American Meteorological Society. 2015. Vol. 143. P. 3–25. DOI: 10.1175/MWR-D-14-00098.1.

7. Cai M., Huang B. A new look at the physics of Rossby waves: a mechanical–Coriolis oscillation. Journal of the atmospheric sciences. 2013. Vol. 70. P. 303–316. DOI: 10.1175/JAS-D-12-094.1.

8. Курганский М.В. Спиральность в атмосферных динамических процессах // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. № 2. С. 147–163. DOI: 10.7868/S0002351517020079.

Kurgansky M.V. Helicity in dynamic atmospheric processes. Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics. 2017. Vol. 53. № 2. С. 127–141. DOI: 10.1134/S0001433817020074.

9. Callies J., Ferrari R., Bühler O. Transition from geostrophic turbulence to inertia–gravity waves in the atmospheric energy spectrum. Proc Natl Acad Sci USA. 2014. 111(48). P. 17033–17038. DOI: 10.1073/pnas.1410772111.

10. Shen J., Tang T., Wang L.-L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Berlin: Springer, 2011. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71041-7.

11. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеорологическое издание, 1967. 356 с.

Marchuk G.I. Numerical methods in weather forecast. L.: Gidrometeorologicheskoe izdanie, 1967. 356 p. (in Russian).

12. Полякова Н.М., Ширяева Е.В. О вычислении коэффициента турбулентного переноса в задаче о седиментации примеси // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2017. № 4–1. С. 44–50.

Poljakova N.M., Shirjaeva E.V. On the calculation of the turbulent transport coefficient in the problem of sedimentation of an impurity // Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennyye nauki. 2017. № 4–1. P. 44–50 (in Russian).

13. Петрова А.А., Смагин В.В. Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение // Известия вузов. Математика. 2016. № 8. P. 49–59.

Petrova A.A., Smagin V.V. Convergence of the Galyorkin method of approximate solving parabolic equation with weight integral condition. Russian Mathematics. 2016. Vol. 60. № 8. P. 42–51. DOI: 10.3103/S1066369X16080053.

14. Увижева Ф.Х., Калажкоков Х.Х. Применение метода расщепления и спектрального метода Галеркина к задачам региональной экологии // Успехи современного естествознания. 2019. № 10. С. 132–140. DOI: 10.17513/use.37226.

Uvizheva F.H., Kalazhokov H.H. Application of the splitting method and the Galerkin spectral method to the problems of regional ecology // Advances in current natural sciences. 2019. № 10. P. 132–140 (in Russian).