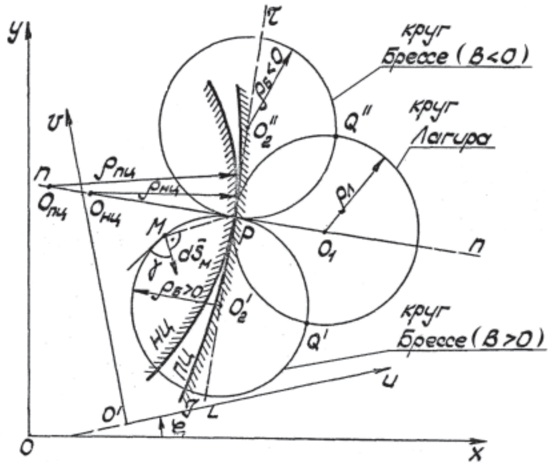
Эта окружность в точке P касается общей нормали к центроидам n-n, прямые O_1P и O_2P взаимно перпендикулярны (рис. 1).



Выражение скорости для произвольной точки подвижной плоскости в виде

$$v = s'_{sA}\dot{s}_A.$$

Отсюда касательное ускорение точки

$$w^{\tau} = s''_{sA}\dot{s}_A^2 + s'_{sA}\ddot{s}_A$$

или

$$w^{\tau} = s''_{sA}v_A^2 + s'_{sA}w_A^{\tau}.$$

Принимая $w^{\tau} = 0$, получим $\Gamma = K$, где

$$K = -\,w_A^{\tau}/v_A^2.$$

Таким образом, при $\Gamma = K$ точки, лежащие на окружности, имеют касательные ускорения, равные нулю. Полученная окружность в кинематике имеет название «окружность перемены», а круг, ограниченный ею, – круг «перемены», или «круг Брессе».

Если $\Gamma \neq K$, то эту окружность называют «условной окружностью перемены».

При $B = \infty$ круг Брессе стягивается в точку P, а при $B = 0$ вырождается в прямую, совпадающую с общей нормалью к центроидам n-n.

Геометрическое место центров окружности для последовательных положений плоскости, определяемое соотношениями, в общем случае называется «условной центрисой перемены», а при выполнении условия $\Gamma = K$ – «центрисой перемены».

Свойства круга Брессе.

Свойство 1. Отношение радиусов кривизны круга Брессе и круга Лагира не зависит от значения и равно

$$\frac{\rho_{\text{бр}}}{\rho_A} = \frac{\varsigma'_{sA}}{B}.$$

При этом, если $\rho_{\text{вр}} < 0$, то центр круга Брессе лежит на положительной полуоси общей касательной к центроидам τ–τ, а если $\rho_{\text{вр}} > 0$, то на отрицательном.

Таким образом, центр круга Брессе всегда находится на общей касательной к центроидам.

Свойство 2. Окружность перемены, для точек которой $\Gamma = K$, разделяет подвижную плоскость на области по признаку знака разности Γ-K. В кинематике это области положительных или отрицательных касательных ускорений.

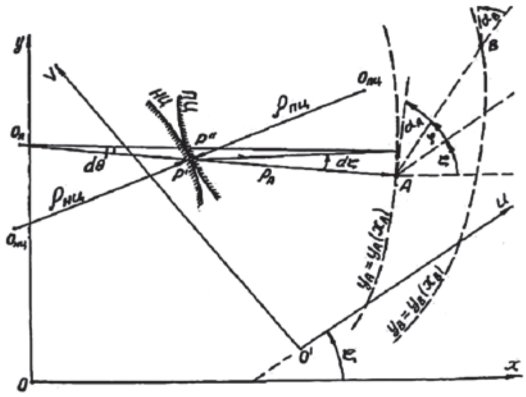
Свойство 3. В общем случае любая близлежащая к окружности перемены точка подвижной плоскости в произвольном ее положении входит в круг Брессе и выходит из него под острым углом.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРИЗНАКАМ

Соколов Г.М., Волкова Т.Ф., Сибагатуллина А.К.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: mivlgu@mail.ru

В задачах по определению геометрических параметров плоского движения твердого тела обычно используются известные кинематические соотношения, содержащие параметр времени. Вместе с тем, эти задачи могут быть выделены в самостоятельную группу. Их решения можно получить на основе соотношений между перемещениями, рассматривая движение тела с подвижной системой координат $uO'v$ относительно неподвижной системы xOy (рисунок).



Основной геометрической формой задания движения плоскости $uO'v$ будем считать

$$x_A = x_A(s_A);$$

$$y_A = y_A(s_A);$$

$$\zeta_A = \zeta_A(s_A),$$

где s_A – путь полюса A (x_A, y_A), ζ – угол поворота тела.

Покажем необходимые соотношения.

Радиус кривизны траектории точки A

$$\rho_A = (1 + y'^2_{AxA})^{1,5} / y''_{AxA}.$$

Координаты центра кривизны траектории точки A

$$x_{OA} = x_A - (y'_{AxA}(1 + y'^2_{AxA})\big/y''_{AxA});$$

$$y_{OA} = y_A - (1 + y'^2_{AxA}\big/y''_{AxA}).$$

Мгновенный центр вращения P' (МЦВ) находится на прямой O_AA – нормали к траектории точки A.

Расстояние AP (мгновенны радиус точки A)

$$r_A = \zeta'^{-1}_{sA}.$$

Координаты точки P' в неподвижной системе xOy (уравнение неподвижной центроиды НЦ)

$$x_P = x_A - \zeta'^{-1}_{yA}, \quad y_P = y_A - \zeta^{-1}_{xA}.$$

Точка P' подвижной плоскости совпадает с точкой P'. Ее перемещение равно нулю. Назовем её мгновенным центром перемещений (МЦП). Она соответствует понятию мгновенного центра скоростей (МЦС). Координаты точки P' в системе (подвижная центроида ПЦ)

$$u_P = u_A - \zeta'^{-1}_{xA}(y'_{AxA}\cos\zeta - \sin\zeta),$$

$$v_P = v_A - \zeta'^{-1}_{yA}(\cos\zeta - y'_{AxA}\sin\zeta).$$

Радиус кривизны НЦ

$$\rho_{нц} = (1 + y'^2_{PuP})^{1,5} / y''_{PuP}.$$

Координаты центра кривизны НЦ (ее эволюты в системе xOy)

$$x_{Oнц} = x_P - y'_{PxP}\,(1 + y'^2_{PxP}\,/v''_{PxP}\,);$$
$$y_{Oнц} = y_P + (1 + y'^2_{PxP}\,/ y''_{PxP}\,).$$

Радиус кривизны ПЦ

$$\rho_{пц} = (1 + v'^2_{PuP})^{1,5} / v'_{PuP}.$$

Координаты центра кривизны ПЦ (ее эволюты в системе $uO'v$)

$$u_{Oпц} = u_P - u'_{PuP}(1 + v'^2_{PuP}) / v''_{PuP}\,;$$
$$v_{Oпц} = v_P + (1 + v'^2_{PuP} / v''_{PuP}).$$

Установлены соотношения для произвольной точки B ($u_в$, $v_в$). Если заданы $AB = l$ и угол ϕ, то координаты точки B в неподвижной системе

$$x_B = x_A - l\cos(\zeta + \phi),$$
$$y_B = y_A - l\sin(\zeta + \phi).$$

Радиус кривизны и координаты центра кривизны ее траектории

$$\rho_B = (1 + y'^2_{BxB})^{1,5} / y''_{BxB}\,;$$
$$x_{OB} = x_B - y'_{BxB}(1 + y'^2_{BxB}) / y''_{BxB}\,;$$
$$y_{OB} = y_B - (1 + y'^2_{BxB} / y''_{BxB}).$$

Рассмотрены особенности, вытекающие из соотношения между величинами ς'_{sA} и ϑ'_{sA}.

Введены понятия коэффициентов поворота в точках A и B в заданном направлении. Коэффициенты поворота в точках

$$k_A = \alpha'_{AxA} s'^{-1}_{xA},$$
$$k_B = \alpha'_{BxB} x'_{BxA} s'^{-1}_{xA}.$$

Коэффициент поворота плоскости

$$k_П = \zeta'_{xA} s'^{-1}_{xA}.$$

Приведем другие способы задания плоского движения тела.

1. Траектория двух точек плоскости.
2. Траектория точки и коэффициент поворота в ней.
3. Траектория одной точки и коэффициент поворота в другой.
4. Траектория точки и уравнение неподвижной центроиды.
5. Траектория точки и уравнение подвижной центроиды.
6. Траектория точки и коэффициент поворота плоскости.
7. Коэффициенты поворота в двух точках.
8. Коэффициент поворота в точке и коэффициент поворота плоскости.
9. Коэффициент поворота в точке и уравнение неподвижной центроиды.
10. Коэффициент поворота в точке и уравнение подвижной центроиды.
11. Уравнение неподвижной центроиды и коэффициент поворота плоскости.
12. Уравнение подвижной центроиды и коэффициент поворота плоскости.
13. Уравнения подвижной и неподвижной центроид.

Эти способы охватывают широкий круг задач и могут найти практическое применение при их решении.

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Соколов Г.М., Елсукова Е.А., Косульникова Ю.А.

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, e-mail: elsukova_L@mail.ru

При изучении плоского движения твёрдого тела используется понятие мгновенного

центра скоростей – МЦС. Вместе с тем, не привлекая параметра времени, можно определить понятие мгновенного центра перемещений, предшествующее по смыслу понятию МЦС, которое расширяет возможности инженерных исследований.

Исследуем точки плоскости с системой координат $uO'v$, движущейся относительно неподвижной системы xOy, когда задана траектория полюса A и угол поворота плоскости в зависимости от пути полюса

$$y_A = y_A(x_A);$$
$$\zeta_A = \zeta_A(s_A).$$

Формулы перехода между координатами:

от xOy к $uO'v$

$$u = u_A + (x - x_A)\cos\zeta + (y - y_A)\sin\zeta;$$
$$v = v_A + (x - x_A)\sin\zeta + (y - y_A)\cos\zeta;$$

от $uO'v$ к xOy

$$x = x_A + (u - u_A)\cos\zeta - (v - v_A)\sin\zeta;$$
$$y = y_A + (u - u_A)\sin\zeta - (v - v_A)\cos\zeta.$$

Производные

$$x'_{sA} = x'_{AsA} - \left(y - y_A\right)\zeta'_{sA};$$
$$y'_{sA} = y'_{AsA} - \left(x - x_A\right)\zeta'_{sA};$$
$$x''_{sA} = x''_{AsA} - \left(x - x_A\right)\zeta'^2_{sA} - \left(y - y_A\right)\zeta''^2_{sA};$$
$$y''_{sA} = y''_{AsA} - \left(y - y_A\right)\zeta'^2_{sA} + \left(x - x_A\right)\zeta''^2_{sA}.$$

Производные перемещений произвольной точки по перемещению точки A связаны соотношением

$$s'_{sA} = \sqrt{x^2_{sA} + y'^2_{sA}}.$$

Положим, $s'_{sA} = 0$, тогда $x'_{AsA} = 0$, $y'_{AsA} = 0$.

Этот признак определяет единственную точку подвижной плоскости P'', перемещение которой при $d\zeta \neq 0$ равно нулю. Назовем ее мгновенным центром перемещений (МЦП). Она соответствует известному в кинематике понятию мгновенного центра скоростей (МЦС). Точка P' неподвижной плоскости, совпадающая с точкой P'', является мгновенным центром вращения (МЦВ).

Координаты МЦВ

$$x_p = x_p - \zeta'^{-1}_{yA};\quad y_p = y_p - \zeta'^{-1}_{xA};$$

где

$$\zeta'_{yA} = \zeta'_{sA} y'^{-1}_{AsA};\quad \zeta'_{xA} = \zeta'_{sA} x'^{-1}_{AsA}.$$

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости для последовательных положений подвижной плоскости является неподвижной центроидой (НЦ) (рисунок).

Координаты точки МЦП в подвижной системе $uO'v$

$$u_p = u_A - \zeta^{-1}_{xA}\left(y'_{AxA}\cos\zeta - \sin\zeta\right);$$

$$v_p = v_A + \zeta^{-1}_{xA}\left(\cos\zeta + y'_{AxA}\sin\zeta\right).$$

Геометрическое место МЦП на подвижной плоскости является подвижной центроидой (ПЦ).

Отметим следующее.

а) Если $ds_A \neq 0$ ($\zeta'_{sA} \neq \infty$), $d\zeta \neq 0$ (общий случай), то точка P имеет отображение на неподвижной (МЦВ) и