где $$\frac{\partial r}{\partial n}(y,x)=\frac{(y_1-x_1)n_1+(y_2-x_2)n_2}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}} \qquad (17)$$

и $\overline{n}=\{n_1;n_2\}$ – внешняя нормаль.

Разберемся с вопросом о выборе внешней нормали на каждой из сторон. Очевидно, что для стороны длинной a внешняя нормаль – $\overline{n}=\{0;-1\}$, для стороны длинной b внешняя нормаль – $\overline{n}=\{-1;0\}$, для стороны y_1 внешняя нормаль – $\overline{n}=\{1;k^*\}$; для стороны y_2 внешняя нормаль – $\overline{n}=\{-k_2;1\}$.

Решим интегральное уравнение (14) методом коллокаций. Организуем две последовательности: $\{x_i\}=\{x_i^1;x_i^2\}$ – внешние узлы и $\{y_j\}=\{y_j^1;y_j^2\}$ – внутренние узлы, где $i=1,\ldots,N$ и $j=1,\ldots,N$. Заметим, что методом коллокаций называется такой численный метод дискретизации интегрального (14) при котором множество внутренних узлов совпадает с множеством внешних узлов, то есть $\{x_i\}_{i=1}^N=\{y_j\}_{j=1}^N$. Из вида уравнения (14) отраженное поле следует искать в виде:

$$p^{sc}(x)=p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y)+ip^{sc}_{\mathrm{Im}}(y). \qquad (18)$$

Тогда дискретизируя уравнение (14) и разделяя вещественные и мнимые части в нем получим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p^{sc}_{\mathrm{Re}}(x_i)+\frac{k}{4}\sum_{j=1}^{N}p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y_j)Y_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l+\frac{k}{4}\sum_{j=1}^{N}p^{sc}_{\mathrm{Im}}(y_j)J_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l=\\ =\frac{k}{16}\sum_{j=1}^{N}\left[J_1(kr_{0j})J_0(kr_{ij})-Y_1(kr_{0j})Y_0(kr_{ij})\right]\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x)\Delta l\,.\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p^{sc}_{\mathrm{Im}}(x_i)+\frac{k}{4}\sum_{j=1}^{N}p^{sc}_{\mathrm{Im}}(y_j)Y_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l-\frac{k}{4}\sum_{j=1}^{N}p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y_j)J_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l=\\ =\frac{k}{16}\sum_{j=1}^{N}\left[J_1(kr_{0j})Y_0(kr_{ij})+Y_1(kr_{0j})J_0(kr_{ij})\right]\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x)\Delta l\,.\end{aligned} \qquad (20)$$

где $r_{ij}=|y_j-x_i|$, $r_{0j}=|y_j-x|$ и Δl – величина шага.

Введем обозначения:

$$K^{\mathrm{Re}}_{ij}=\frac{k}{4}p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y_j)Y_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l;$$

$$K^{\mathrm{Re}}_{ij}=\frac{k}{4}p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y_j)Y_1(kr_{ij})\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x_i)\Delta l;$$

$$f^{\mathrm{Re}}_{i}=\frac{k}{16}\sum_{j=1}^{N}\left[J_1(kr_{0j})J_0(kr_{ij})-Y_1(kr_{0j})Y_0(kr_{ij})\right]\frac{\partial r}{\partial n}(y_j,x)\Delta l;$$

Таким образом, мы получили систему вида $Ap=f$, где $A\in M_{2N\times 2N}$; $p,f\in R^{2N}$ и имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & .. & K^{\mathrm{Re}}_{ji} & & & \\ \ldots\ldots & & & K^{\mathrm{Im}}_{ij} & & \\ K^{\mathrm{Re}}_{ij} & \ldots & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & \ldots & K^{\mathrm{Re}}_{ij} \\ & -K^{\mathrm{Im}}_{ij} & & \ldots\ldots & & \\ & & & K^{\mathrm{Re}}_{ij} & \ldots & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad p=\begin{pmatrix}p^{sc}_{\mathrm{Re}1}(y)\\ \ldots\\ p^{sc}_{\mathrm{Re}}(y_N)\\ p^{sc}_{\mathrm{Im}1}(y)\\ \ldots\\ p^{sc}_{\mathrm{Im}}(y_N)\end{pmatrix};\quad f=\begin{pmatrix}f^{\mathrm{Re}}_1\\ \ldots\\ f^{\mathrm{Re}}_N\\ f^{\mathrm{Im}}_1\\ \\ f^{\mathrm{Im}}_N\end{pmatrix}.$$

Заметим, что диагональные элементы матрицы $A\in M_{2N\times 2N}$ должны иметь вид $a_{ii}=\frac{1}{2}-K^{\mathrm{Re}}_{ii}$, но так как $K^{\mathrm{Re}}_{ii}<<\frac{1}{2}$, то ими можно пренебречь.

Так как на диагонали матрицы $A\in M_{2N\times 2N}$ стоят элементы большие, чем остальные элементы матрицы, то эта матрица хорошо обусловлена. Для решения данной системы линейных алгебраических уравнений можно пользоваться QL – алгоритмами.

Предложенный в данной работе метод был апробирован на конкретных тестовых геометриях, для которых удается эффективно построить распределение первой сотни собственных частот колебания в реальном масштабе времени.

Список литературы

1. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА ПРИ НАЛИЧИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ

Бертяев В.В.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассмотрим движение груза M массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной – l_0 (рис. 1,а). Пренебрежем размерами груза и заменим его материальной точкой. Нить для материальной точки является связью, определяемой неравенством

$$x^2+y^2=l_0^2 \quad \text{или} \quad r\le l_0, \qquad (1)$$

где r – длина радиус вектора, задающего положение точки на полярной оси OM.

Рассмотрим материальную точку в произвольный момент времени, предполагая наличие связи (1) (рис. 1,б), действие которой, при составлении уравне-

ний движения, заменим ее реакцией – силой натяжения нити $\overline{N}$. На точку также действует сила тяжести $\overline{P}$. Учитывая, что при наличии связи $r = l_0$ и $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, дифференциальные уравнения в проекциях на оси полярной системы координат запишем в виде:

$$l_0\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi;$$
$$-l_0\dot{\varphi}^2 = -N + mg\cos\varphi.$$

Данные уравнения можно преобразовать к виду

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0;$$
$$\tilde{N} = \tilde{\omega}^2 + \cos\varphi, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{g/l_0}$, $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}/k$ – приведенная угловая скорость отклонения нити от вертикали, $\tilde{N} = N/mg$ – сила натяжения, отнесенная к весу груза.

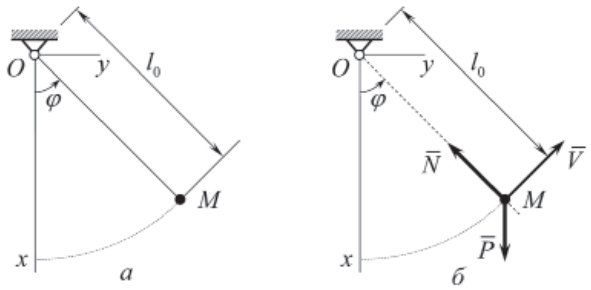


Рис. 1. Расчетная схема

Начальные условия для системы (2) имеют вид

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0. \qquad (3)$$

Движение материальной точки будет описываться дифференциальными уравнениями (2) с начальными условиями (3) до тех пор, пока связь, наложенная на данную точку, остается удерживающей, т.е. выполняется условие

$$r = l_0 \text{ или } N \geq 0, \text{ т.е. } \tilde{\omega}_\varphi^2 + \cos\varphi \geq 0. \qquad (4)$$

Для решения первого уравнения системы (2) введем преобразование $\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Разделяя переменные, представим это уравнение в виде

$$d\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) = -k^2\sin\varphi d\varphi.$$

Интегрируя с учетом начальных условий (3), получим

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = 2k^2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right). \qquad (5)$$

Интеграл энергии (5) примет вид:

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}_0^2 + 2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right) = 4\left(\sigma - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (6)$$

где $\sigma = \dfrac{1}{4}\tilde{\omega}_0^2 + \sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}$.

Выражение для силы натяжения нити с учетом (6) запишется в виде

$$\tilde{N} = \tilde{\omega}_0^2 + 3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь предельные состояния при движении груза. Анализ выражения (6) позволяет сделать вывод о том, что параметр σ характеризует два вида движения груза: колебательное и круговое.

При значениях $0 < \sigma \leq 1$ его можно представить в виде $\sigma = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ и выражение (6) запишется в виде

$$\tilde{\omega}^2 = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда следует, что $|\varphi| \leq \alpha$ и $\tilde{\omega}\big|_{\varphi=\pm\alpha} = 0$, т.е. движение носит колебательный характер, а параметр α характеризует амплитуду колебательного движения:

$$\alpha = 2\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}.$$

При значениях $\sigma > 1$ величина $\tilde{\omega} > 0$ в любой момент времени, и груз совершает круговое движение.

Таким образом, предельным, разделяющим два движения груза, является уравнение σ = 1 (рис. 2), которое можно записать в виде

$$\tilde{\omega}_0^2 = 4\left(1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) = 4\cos^2\frac{\varphi_0}{2}$$

или

$$\tilde{\omega}_0 = \pm 2\cos\frac{\varphi_0}{2}.$$

При значениях $|\tilde{\omega}_0| > 2\cos\dfrac{\varphi_0}{2}$ груз может совершать круговое движение, а при значениях $|\tilde{\omega}_0| \leq 2\cos\dfrac{\varphi_0}{2}$ – колебательное движение.

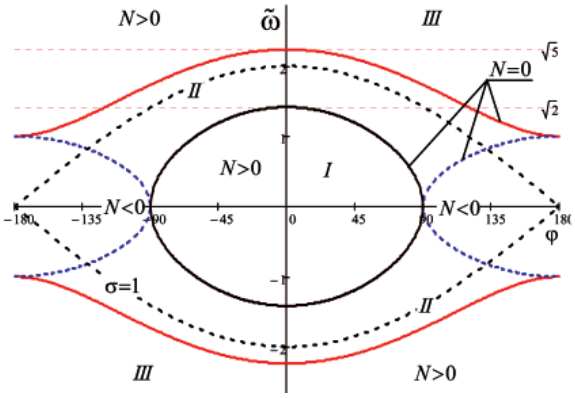


Рис. 2. Области на фазовой плоскости

Область на фазовой плоскости, в которой связь становится неудерживающей $\tilde{N} < 0$, определяется кривыми $\tilde{\omega} = \pm\sqrt{-\cos\varphi}$ (рис. 2), и расположена внутри интервалов $-\pi \le \varphi_0 < -\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 \le \pi$.

Следовательно, при колебательном движении груза, его амплитуда не может превышать величину $\alpha_{пр} = \frac{\pi}{2}$. Значения начальных условий, обеспечивающих такое движения груза при наличии удерживающей связи, расположены внутри эллипса, задаваемого уравнением (область *I* на рис. 2)

$$\frac{\tilde{\omega}_0^2}{4\sin^2\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{\omega}_0^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Для определения области начальных условий, обеспечивающих круговое движение груза, рассмотрим выражение (7). Минимальное значение реакции нити достигается при значениях $\varphi = \pi$. Кривые $\tilde{\omega}_0 = \pm\sqrt{3 + 2\cos\varphi_0}$, определяемые уравнением $\tilde{N} = 0$, ограничивают снизу область начальных условий, обеспечивающих круговое движение груза (области III рис. 2).

В качестве примера рассмотрим численные решения системы (2) со следующими начальными условиями (см. рис. 2):

1. $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1$ – обеспечивают колебательное движение (область I);

2. $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1{,}8$ – связь становится неудерживающей (область II);

3. $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 3$ – обеспечивают круговое движение (область III).

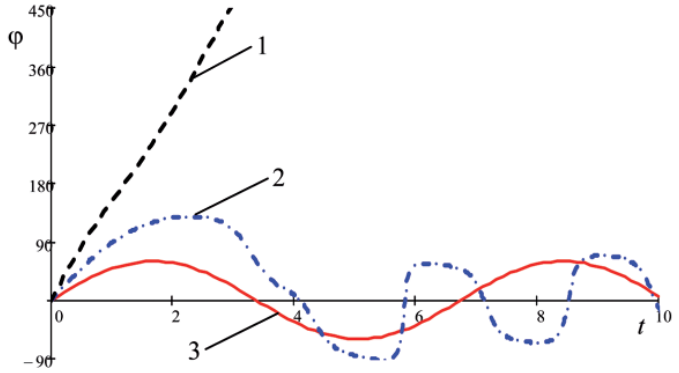


Рис. 3. Графики изменения угловых координат, при начальных условиях:
1 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1$; 2 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1{,}8$; 3 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 3$

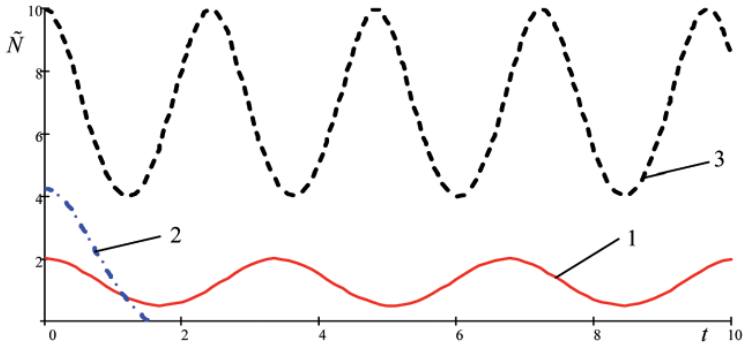


Рис 4. График изменения силы реакций связи при начальных условиях:
1 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1$; 2 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1{,}8$; 3 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 3$

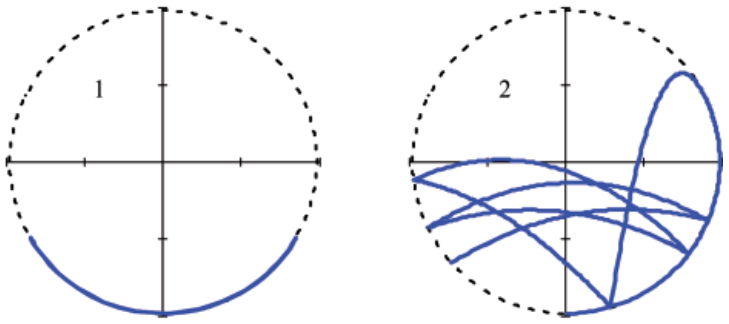


Рис. 5. Траектории груза при начальных условиях:
1 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1$; 2 – $\varphi_0 = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 1{,}8$

Как видно из рис. 4 и 5, в некоторый момент времени связь исчезает, т.е. $x^2 + y^2 < l_0^2$, и груз начинает двигаться под действием силы тяжести, как свободная материальная точка. В последующих движениях мгновенное возникновение связи приводит к изменению направления движения груза.

Список литературы

1. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум: учебное пособие // СПБ, БХВ. – СПб., 2005. – 752 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: ч. 1, 2. – М.: Наука, 1983.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Богма А.Е.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Выясним, какие факторы влияют на быстроту стабилизации неустановившегося ламинарного потока вязкой жидкости в открытом коллекторе прямоугольного сечения без учета трения о боковые стенки (рис. 1).

В работе [1] решена одномерная задача по определению скорости и объемного расхода потока жидкости при ламинарном и нестационарном режиме движения. Формулы скорости V и объемного расхода Q соответственно имеют вид:

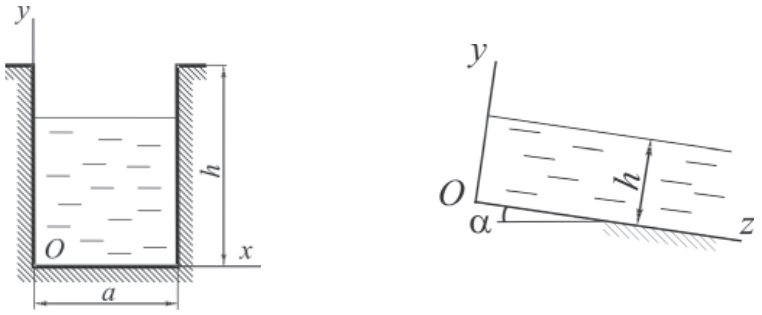
$$V(y,t) = \frac{gi}{6\nu} y(2h - y) - \frac{2gi}{h\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\omega_m^2 \nu t)}{\omega_m^3} \sin \omega_m y; \quad (1)$$

$$Q = \frac{agih^3}{3\nu} - \frac{2agi}{h\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\omega_m^2 \nu t)}{\omega_m^4}, \quad (2)$$

где y – координата по глубине потока; t – время; g – ускорение свободного падения; $i = \sin\alpha \approx \alpha$ – уклон коллектора; ν – кинематическая вязкость жидкости; h – глубина потока; ω_m – собственное число, определяемое по формуле;

$$\omega_m = (2m - 1)\frac{\pi}{2h};$$

a – условная ширина коллектора.



а б

Рис. 1. Схема сливного коллектора прямоугольного сечения

Для удобства анализа формул (1) и (2) запишем их в безразмерном виде, для чего, разделив выражения (1) и (2) соответственно на максимальные значения скорости и расхода, получим:

$$\bar{V} = (2 - \bar{y})\bar{y} - 32 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_m \frac{\bar{y}}{2})}{\omega_m^3 \exp\left(\omega_m^2 \frac{F_0}{4}\right)}; \quad (3)$$

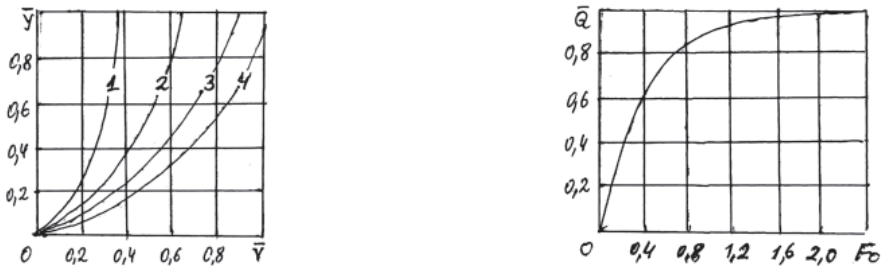
$$\bar{Q} = 1 - 96 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\omega_m^2 \frac{F_0}{4}\right)}{\omega_m^4}, \quad (4)$$

где $\bar{y} = \frac{y}{h}$ – безразмерная координата, изменяющаяся в пределах $0 \le \bar{y} \le 1$; $F_0 = \frac{\nu t}{h^2}$ – число Фруда (безразмерное время).

Заметим, что с математической точки зрения поток жидкости становится установившимся, когда вторые слагаемые в равенствах (3) и (4) обращаются в ноль. Это означает, что скорость и объемный расход достигли своих максимумов и далее от времени зависеть не будут. Очевидно, безразмерные величины $\bar{V}$ и $\bar{Q}$ изменяются в пределах оси от 0 до 1.

По формулам (3) и (4) проведены вычисления и построены кривые изменения эпюры скоростей и расхода в зависимости от числа Фурье F_0 (рис. 2).

Анализ формул (3) и (4), а также построенных графиков позволяет сделать вывод, что на стабилизацию потока жидкости существенное влияние оказывают два фактора: вязкость жидкости и глубина потока. Чем больше глубина потока, тем медленнее наступает его стабилизация и наоборот. С уменьшением вязкости жидкости стабилизация потока наступает быстрее.



а б

Рис. 2. Изменение эпюры скоростей потока жидкости (а) и объемного расхода (б): 1 – F_0= 0.2; 2 – F_0= 0.4; 3 – F_0= 0.8; 4 – F_0= 2