7. Ivanov V.V. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects / V.V. Ivanov, N.V. Ivanova. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.
8. Гирлин С.К. Моделирование взаимодействия развивающихся систем / С.К. Гирлин, В.В. Иванов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 58-60.
9. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 65-67.
10. Гирлин С.К. Моделирование оптимизации распределения внутренних и внешних ресурсов в экономической системе / С.К. Гирлин, А.В. Билюнас // Сталий розвиток підприємств сфери послуг: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Ялта, 23-24 жовтня 2009 р.). – Ялта: РВНЗ КГУ, 2009. – С. 287-290.
11. Гирлин С.К. Аналитическое решение одной задачи оптимального управления открытой развивающейся системой // С.К. Гирлин, А.В. Билюнас // Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Ялта, 23-24 листопада 2009 р.). – Зб. статей. – Ялта: РВВ КГУ, 2009. – Вип. 3. – С. 191-197.
12. Viktor V. Ivanov and Natalya V. Ivanova. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОГАБАРИТНОЙ ГАЗОСТАТИЧЕСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ОПОРЫ С ДИСКРЕТНЫМ ПОДДУВОМ

Долгих Т.Ф., Снопов А.И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, e-mail: DTF_STUD@mail.ru

Рассмотрим кольцевую газостатическую опору с дискретным поддувом. Внешний радиус опоры равен R_H, а внутренний – R_B. Полагаем, что зазор между смазываемыми поверхностями постоянен и равен h. Газ в смазочный слой опоры попадает под давлением p_s через N произвольно расположенных на одной из смазываемых поверхностей питателей типа «простая диафрагма». При этом диаметры питателей могут быть разные: $d0_j$, $j = 1, 2, ..., N$ – диаметры подводящих каналов, а d_j, $j = 1, 2, ..., N$ – диаметры «карманов». Поток газа в смазочном слое принимается неодномерным, установившимся, ламинарным, изотермическим, а в питателях – одномерным, установившимся, адиабатическим, подчиняющимся законам динамики идеального газа.

Любому потоку вязкого газа между неподвижными параллельными плоскостями соответствует определенная аналитическая функция $w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ – комплексный потенциал:

$$w(z) = P^2(x, y) + i\psi(x, y). \qquad (1)$$

Комплексный потенциал на границах опоры удовлетворяет условию $P = p_a$, а на границах питателей Γ_j – условиям:

$$\frac{1}{\pi d_j}\oint_{\Gamma_j} \operatorname{Re} w(z)\, d\Gamma_j = p_{dj}^2, \quad j = 1, 2, ..., N. \qquad (2)$$

Из представления комплексного потенциала (1) получаем формулу для определения поля давлений в смазочном слое:

$$P = \sqrt{\operatorname{Re} w(z)}. \qquad (3)$$

Расчет кольцевых газостатических опор порой очень затруднителен. В таких случаях для нахождения комплексного потенциала удобно воспользоваться методом конформных отображений и перейти к расчету полосовой опоры. Для этого свяжем с плоскостью опоры систему координат r, φ и введем новую комплексную координату $\varsigma = re^{i\phi}$. Конформное отображение дает функция $z = -i\ln(\varsigma/R_H)$. Тогда кольцевой опоре в фиктивном потоке z соответствует безграничная полоса шириной $L = \ln(R_H/R_B)$, на которой расположены N дорожек точечных источников. Диаметры питателей в полосовой опоре равны $d0'_j = d0_j/r_j$ для подводящих каналов и $d'_j = d_j/r_j$ для «карманов». Базовые координаты питателей будут $\varsigma_j = -i\ln\left(\left(r_j/R_H\right)\cdot e^{i\phi_j}\right)$. B – шаг, с которым расположены питатели в каждой дорожке. Полагаем параметры газа и толщину смазочного слоя в фиктивном потоке такими же, как и для реального газа. Следовательно, давления в фиктивном потоке в соответствующих точках будут такими, как и в реальном.

Комплексный потенциал фиктивного потока в смазочном слое полосовой опоры легко строится методом источников и стоков. В результате получаем:

$$w(z) = \frac{12\mu a_s^2}{\kappa\pi h^3}\sum_{k=1}^{N} Q_k f_k(z) + p_a^2. \qquad (4)$$

Функции $f(z)$, определяющие комплексные потенциалы потоков в полосе z, которые породили дорожки точечных источников, полагаем известными. μ – динамический коэффициент вязкости, κ – показатель адиабаты Пуассона, p_a – давление окружающей среды, a_s – скорость звука в газе.

Условие (2) и равенство расходов газа через смазочный слой и через питатели $Q_j = M_j$, дают систему нелинейных уравнений для определения давлений p_{dj} на кромках питателей и расхода газа Q_j. Но нужно помнить, что мы рассматриваем питатели типа «простая диафрагма», поэтому целесообразно применять схему *«двойного дросселирования»*. Это означает, что на входе в «карман» полагаем площадь минимального сечения $\hat{A}_{\min}^{(j)} = \pi d0_j^2/4$ и эмпирический поправочный коэффициент $\hat{\alpha} = 0{,}9$, а на выходе из «кармана» – $A_{\min}^{(j)} = \pi d_j h$, $\alpha = 0{,}8$. Тогда для определения давлений на кромках питателей составляем две системы нелинейных уравнений:

$$x0_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{12\hat{\alpha}\mu\, q_s \hat{A}_{\min}^{(i)} E_{ij}}{\pi h^3 p_s}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q(x0_i) + p_1^2, \quad j = 1, 2, ..., N; \qquad (5.1)$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{N}\frac{12\alpha\mu a_s A_{\min}^{(i)} E_{ij}}{\pi h^3 \hat{p}_{dj}}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q(x_i) + p_1^2, \quad j = 1, 2, ..., N. \qquad (5.2)$$

Здесь

$$x0_j = \left(\hat{p}_{dj}/p_s\right)^2, \quad x_j = \left(p_{dj}/\hat{p}_{dj}\right)^2,$$

$$E_{ij} = \operatorname{Re}\left[\oint_{\Gamma_i} f_j(\varsigma)\, d\Gamma_i\right], \quad i, j = 1, 2, ..., N,$$

$q(x)$ – газодинамическая функция, p_1 – отношение давлений на входе в питатель и на выходе.

В этом случае количество газа, поступающего в карман в единицу времени через подводящий канал с диаметром $d0_j < d_j$, вычисляется по формуле:

$$\hat{M}_j = \hat{\alpha}\frac{\kappa p_s \hat{A}_{\min}^{(j)}}{a_s}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q\left(\frac{\hat{p}_{dj}^2}{p_s^2}\right). \qquad (6.1)$$

А количество газа, вытекающего в единицу времени из «кармана» через кольцевую диафрагму под действием давления $\hat{p}_{dj}$ находим из равенства:

$$M_j = \alpha \frac{\kappa \hat{p}_{dj} A_{\min}^{(j)}}{a_s} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} q\left(\frac{p_{dj}^2}{\hat{p}_{dj}^2} \right). \qquad (6.2)$$

Зная расходы газа, строим комплексный потенциал и определяем поле давлений в смазочном слое. Далее можно исследовать влияние неравномерного поддува на интегральные характеристики опоры. При этом расчет может быть произведен для фиктивного потока без возвращения к реальной плоскости, но с использованием якобиана перехода

$$J = \left| \frac{d\varsigma}{dz} \right|^2 = R_H^2 e^{-2\eta}.$$

Так, например, несущая способность газостатической кольцевой опоры вычисляется по формуле:

$$F = R_H^2 \int_0^{LB}\int_0^{0} e^{-2\eta} \left[P(\xi, \eta) - p_a \right] d\xi d\eta. \qquad (7)$$

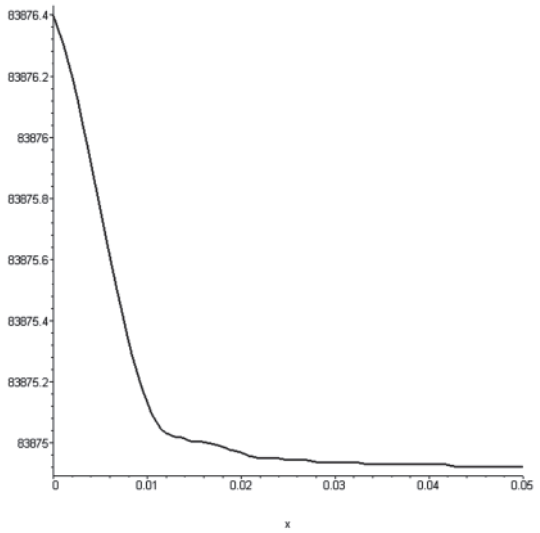
Можно в формуле для определения поля давлений вернуться к полярным координатам r, φ (для простоты вычислений) и найти центр давлений как центр параллельных сил:

$$x_ц = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_B}^{R_H} r^2 \cos\theta P(r,\theta) dr d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{R_B}^{R_H} r P(r,\theta) dr d\theta}. \qquad (8)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим кольцевую газостатическую опору с внешним радиусом $R_H = 0{,}5$ м и внутренним – $R_B = 0{,}005$ м. Возьмем $N = 5$. Диаметры подводящих каналов равны $d0$ = [0,002; 0,008; 0,004; 0,01; 0,006] м, а диаметры «карманов» пусть будут в два раза больше, т.е. $d_j = 2 \cdot d0_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Координаты питателей и толщину смазочного слоя задают массивы r = [0,1; 0,46; 0,18; 0,34; 0,22] м, φ = [π/12, π/2, 5π/6, 5π/4, 11π/6], h = [0,01; 0,02; 0,03,; 0,04; 0,05] м. Давление на входе в питатели равняется двум атмосферным давлениям, т.е. $p_s = 2p_a$. Определим несущую способность и центр давлений этой опоры при данных величинах смазочного слоя.

С помощью метода конформных отображений переходим от кольцевой опоры к безграничной полосе ширины L, на которой расположены пять дорожек питателей. Определяем по схеме «двойного дросселирования» поля давлений на кромках питателей и расход газа. Строим комплексный потенциал для течения газа в смазочном слое, находим поле давлений.

Зависимость несущей способности (ось ординат, H) от толщины газового слоя (ось абсцисс, м) показана на графике:



На расположение центра давлений толщина смазочного слоя оказывает очень слабое влияние. На исследуемой опоре центр давлений располагается практически в начале координат ($x_ц \approx -0{,}003$; $y_ц \approx 10^{-6}$).

Список литературы

1. Снопов А.И. Методические указания к курсу «Динамика вязкой жидкости и газа» часть II – Ростов н/Д.: УПЛ РГУ, 1990. – С. 4–7, 16–26, 28–31.

2. Снопов А.И., Ларикова Н.А., Миронова Е.В. Моделирование газостатических опор с неравномерным дискретным поддувом // Современные проблемы науки и образования: Материалы конференции. – 2009. – №6. – С. 34–36.

КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Дьяконова К.С., Артамонов И.А., Макаров А.С, Матвеева Т.А.

Волжский Политехнический институт (филиал), Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: lyohamakarov@yandex.ru

Приведение матриц к диагональному виду значительно упрощает решение многих прикладных задач, находит широкое применение при моделировании линейных динамических систем, при решении систем линейных алгебраических уравнений; каноническое разложение применяется для возведения матрицы в степень и нахождения обратной матрицы.

В данной работе рассматриваются вопросы построения канонического разложения матриц, его применение для решения систем линейных уравнений и возведения матриц в натуральную степень.

Построим каноническое разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдем корни характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3) = 0.$$

Следовательно, собственные значения матрицы A есть $\lambda_1 = 1$ (2-й кратности) и $\lambda_2 = 3$ (1-й кратности).

Т.к. алгебраические кратности собственных чисел совпадают с геометрическими кратностями, то матрица A приводима к диагональному (каноническому) виду.

Каждому собственному значению λ_k с учетом его кратности найдем соответствующие собственные векторы по формуле

$$(A - \lambda_k E)\,\overline{e}_k = 0.$$

Из полученных собственных векторов $\overline{e}_1 = \{1,1,0\}$, $\overline{e}_2 = \{-1,0,1\}$, $\overline{e}_3 = \{1,1,1\}$ составим собственный базис, в котором матрица A принимает диагональный вид

$$\Lambda = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса к собственному базису $\{\overline{e}_k\}_{k=1}^{n}$.

Разрешив матричное уравнение $\Lambda = B^{-1}AB$ относительно матрицы A и вычислив матрицу

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$