чальный момент времени точка занимала положение $A(R; 0; 0)$ и имела начальную скорость

$$\vec{V}_0 = V_{0y}\vec{j} + V_{0z}\vec{k}.$$

Уравнение связи $f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Уравнения Лагранжа I рода в данном случае имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = 2\lambda x;$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{или} \quad m\ddot{y} = 2\lambda y;$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{или} \quad m\ddot{z} = 0,$$

так как $F_z = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

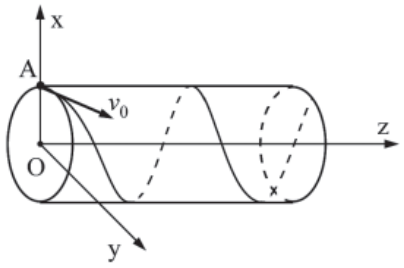

Рис. 3. Материальная точка массой движется по идеально гладкой поверхности цилиндра

Проинтегрируем третье из равенств: $\dot{z} = V_{0z}$, $z = V_{0z}t$. Из первых двух уравнений исключим множитель λ, поделив первое равенство на второе:

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = 0, \quad \text{или} \quad d/dt\left(-\dot{x}y + \dot{y}x\right) = 0,$$

откуда, интегрируя, находим

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = V_{0yR}.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскости xOy: $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi$ или $\dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi$, тогда

$$-\dot{x}y + \dot{y}x = R^2\dot{\varphi} = V_{0y}R,$$

откуда $\varphi = V_{0y}/R = \omega = \text{const}$.

Из последнего равенства следует, что $\varphi = \omega t$ и уравнения движения в конечном виде принимают вид:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = V_{0z}t.$$

Последние уравнения определяют винтовую линию. Принимая во внимание $\lambda = m\ddot{x}/2x$ и учитывая первое равенство, определяем силы реакции:

$$\vec{N} = \lambda grandf = -\frac{m}{2}\omega^2\left(2x\vec{i} + 2y\vec{j}\right) = -m\omega^2 R\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right).$$

Модуль силы реакции –

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = m\omega^2 R.$$

Направляющие косинусы

$$\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{i}}\right) = N_x/N = -\cos\omega t,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{j}}\right) = N_y/N = -\sin\omega t,$$

а сила реакции $\vec{N}$ направлена перпендикулярно оси Oz.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА ПРИ НАЛИЧИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Федюнина М.А.

Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Рассмотрим движение груза M массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити бесконечной длины, намотанной на неподвижный цилиндр радиуса r. В положении устойчивого равновесия длина свободной части нити равна l_0 (рис. 1), размерами груза пренебрегаем.

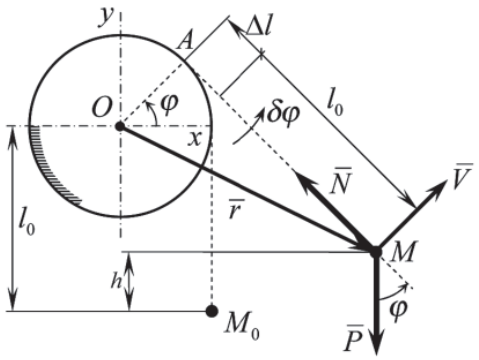

Рис. 1. Расчетная схема

В произвольный момент времени положение материальной точки определим радиус-вектором $\bar{r}$, в качестве обобщенной координаты примем ее угол отклонения от положения устойчивого равновесия φ. Кроме силы тяжести $\bar{P}$ на точку действует идеальная связь – нерастяжимая нить (рис. 1), действие которой, заменим ее реакцией – силой натяжения $\bar{N}$.

Дифференциального уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) - \frac{dT}{d\varphi} = -\frac{d\ddot{I}}{d\varphi}, \tag{1}$$

здесь T – кинетическая энергия, $\ddot{I}$ – потенциальная энергия.

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(l_0 + r\varphi\right)^2\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Здесь $V = l = \left(l_0 + \Delta l\right)\dot{\varphi} = \left(l_0 + r\varphi\right)\dot{\varphi}$ – скорость материальной точки,

$$\ddot{I} = mgh,$$

где $h = y - y_0 = l_0 + r\sin\left(\varphi\right) - l\cos\left(\varphi\right)$, тогда

$$\ddot{I} = mg\left[l_0 + r\sin\varphi - \left(l_0 + r\varphi\right)\cos\varphi\right]. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2), (3) в уравнение Лагранжа (1) получим дифференциальное уравнение движения груза

$$\left(l_0 + r\varphi\right)\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Начальные условия для уравнения (4) имеют вид

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

Движение материальной точки будет описываться дифференциальным уравнением (4) с начальными условиями (5) до тех пор, пока связь, наложенная на данную точку, остается удерживающей, т. е. выполняется условие $x^2 + y^2 + l^2$ или $N \geq 0$. Кроме этого, должно выполняться дополнительное условие

$$l_0 + r\varphi > 0 \quad \text{или} \quad \varphi > \frac{l_0}{r} = -\alpha_{\text{кр}}, \tag{6}$$

которое обеспечивает отсутствие соударения груза с поверхностью неподвижного цилиндра.

С учетом (6) уравнение (4) можно записать в виде

$$\ddot{\varphi}+\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}\varphi}\dot{\varphi}^2+\frac{k^2}{1+\tilde{r}\varphi}\sin\varphi=0, \qquad (7)$$

где $\tilde{r}=r/l_0\ 1/\alpha_{кр}$ – приведенный радиус неподвижного цилиндра,

$$k=\sqrt{g/l_0}.$$

Для нахождения реакции нити $\vec{N}$ запишем основное уравнение динамики несвободной материальной точки в проекциях на нормаль к траектории, которая совпадает с линией *AM*:

$$ml\dot{\varphi}^2=N-mg\cos\varphi,$$

Тогда значение силы *N* будет равно

$$\tilde{N}=\left(1+\tilde{r}\varphi\right)\tilde{\omega}^2+\cos\varphi, \qquad (8)$$

где $\tilde{\omega}=\dot{\varphi}/k$ – приведенная угловая скорость отклонения нити от вертикали, $\tilde{N}=N/mg$ – сила натяжения, отнесенная к весу груза.

Для анализа дифференциального уравнения движения (7) запишем его первый интеграл, выражающий закон сохранения механической энергии

$$T+\ddot{I}=T_0+\ddot{I}_0.$$

С учетом соотношений (2) и (3), получим

$$\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2\tilde{\omega}^2-2\left[\left(1+\tilde{r}\varphi\right)\cos\varphi-\tilde{r}\sin\varphi\right]=$$
$$=\left(1+\tilde{r}\varphi_0\right)^2\tilde{\omega}_0^2-2\left[\left(1+\tilde{r}\varphi_0\right)\cos\varphi_0-\tilde{r}\sin\varphi_0\right].$$

Данное выражение можно привести к виду

$$\tilde{\omega}^2=\frac{A+2B(\varphi)\ \cos\left(\varphi+\beta\ (\varphi)\right)}{\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2}, \qquad (9)$$

где $B(\varphi)=\sqrt{\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2+\tilde{r}^2}$, $\beta(\varphi)=\mathrm{arctg}\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}\varphi}\right)$,

$$A=\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2\tilde{\omega}_0^2-2B\left(\varphi_0\right)\cos\left(\varphi_0+\beta\left(\varphi_0\right)\right).$$

Выражение для силы натяжения нити (8) с учетом (9) запишется в виде

$$\tilde{N}=\frac{A+C(\varphi)\cos\left(\varphi+\gamma(\varphi)\right)}{\left(1+\tilde{r}\varphi\right)}, \qquad (10)$$

где $C(\varphi)=\sqrt{9\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2+4\tilde{r}^2}$,

$$\gamma(\varphi)=\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}\frac{\tilde{r}}{\left(1+\tilde{r}\varphi\right)}\right).$$

Анализ задачи показывает, что возможны два вида движения точки, описываемой дифференциальным уравнением (7): колебательное, вблизи положения устойчивого равновесия и движение по раскручивающейся спирали.

Положение устойчивого равновесия определяется из условия минимума потенциальной энергии точки

$$\frac{d\Pi}{d\varphi}=0,\quad \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}>0.$$

Согласно выражению (3) получим

$$\frac{d\Pi}{d\varphi}=mg\left(l_0+r\varphi\right)\sin\varphi=0;$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}=mg\left[\left(1+r\varphi\right)\cos\varphi+r\sin\varphi\right]=mgB\left(\varphi\right)\cos\left(\varphi-\beta\left(\varphi\right)\right)>0.$$

Так как B(φ) > 0, а угол β изменяется внутри интервала $0<\beta(\varphi)\le\frac{\pi}{2}$, то положения устойчивого равновесия соответствует значениям φ равным

$$\varphi=0,2\pi n;\quad n\in N.$$

График изменения потенциальной энергии материальной точки представлен на рис. 2. При расчетах принято, что $l_0=\pi r$, т.е. $\alpha_{кр}=\pi$.

Рассмотрим теперь предельные состояния движения груза, при которых осуществляется переход от одного вида движения к другому. Преобразуем выражение (9) к виду:

$$\tilde{\omega}^2=4I^2\left[\sigma-\sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right], \qquad (11)$$

где

$$\sigma=\frac{A+2B\ (\varphi)}{4B\ (\varphi)}=\frac{1}{2}+\frac{A}{4B\ (\varphi)};$$

$$\psi=\varphi+\beta(\varphi);$$

$$I^2=\frac{4B\ (\varphi)}{\left(1+\tilde{r}\varphi\right)^2}>0.$$

Анализ выражения позволяет сделать вывод о том, что параметр σ характеризует два вида движения точки: колебательное и движение по раскручивающейся спирали.

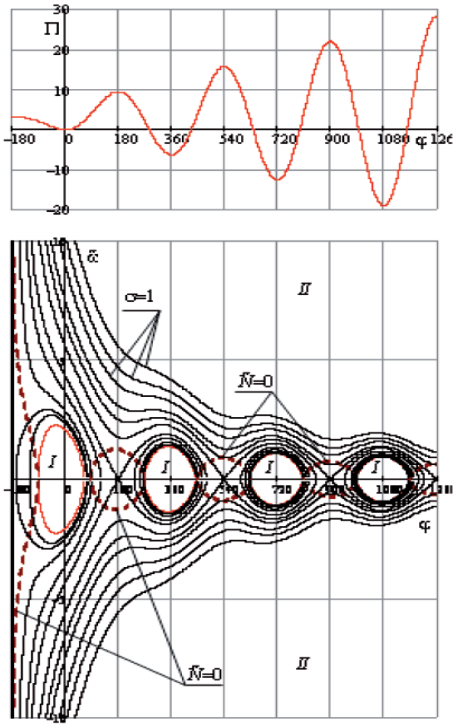

Рис. 2. Области на фазовой плоскости:
I – колебательного движения;
II – движение по раскручивающейся спирали

При значениях $0 < \sigma \geq 1$ его можно представить в виде $\sigma = \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ и выражение (11) запишется в виде

$$\tilde{\omega}^2 = 4I^2\left(\sin^2\frac{\Psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right),$$

откуда следует, что $|\psi| \leq \Psi$ и $|\tilde{\omega}|_{\psi=\pm\Psi} = 0$, т.е. движение носит колебательный характер, максимальное отклонение которого α определится из уравнения:

$$\sin^2\frac{\Psi(\alpha)}{2} = \sin^2\frac{\psi(\alpha)}{2}.$$

При значениях $\sigma > 1$ величина $\tilde{\omega} > 0$ в любой момент времени и груз совершает движение по раскручивающейся спирали.

Таким образом, предельным, разделяющим два движения груза, является уравнение $\sigma = 1$ (рис. 2), которое можно записать в виде:

$$\tilde{\omega}^2 = 4I^2\left(1 - \sin^2\frac{\psi}{2}\right) = 4I^2\cos^2\frac{\psi}{2}$$

или

$$\tilde{\omega} = \pm 2I\cos\frac{\psi}{2}.$$

При значениях $|\tilde{\omega}| > 2I\cos\frac{\psi}{2}$ груз совершает движение по раскручивающейся спирали, а при значениях $|\tilde{\omega}| \leq 2I\cos\frac{\psi}{2}$ – колебательное движение. Следовательно, при колебательном движении груза, его максимальное отклонение от положения устойчивого равновесия не может превышать величину $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$.

Список литературы

1. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум: учебное пособие. – СПб, БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – ч. 1, 2. – М.: Наука, 1983.

О КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТАХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Цуркина Е.К.
Тульский государственный университет, Тула, e-mail: tm@tsu.tula.ru

Очевидно, твердое тело с неподвижной точкой может совершать только угловые перемещения. Эти перемещения называются поворотами. Основное свойство конечных поворотов твердого тела является их некоммутативность [1]. Рассмотрим это на простом примере. Пусть имеем твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда. Повернем параллелепипед сначала относительно оси *x* на 90 градусов, а затем относительно оси *z* на 90 градусов.

Эти повороты показаны на рис. 1. Далее изменим порядок поворотов и повернем параллелепипед сначала на 90° вокруг оси *z* а затем на 90° вокруг оси *x* (рис. 2).

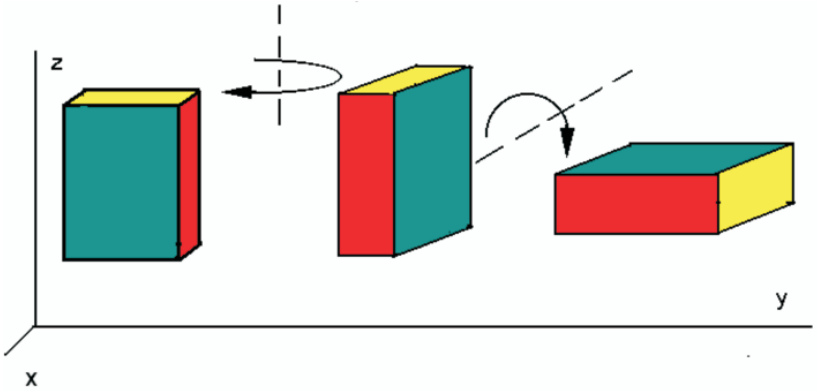

Рис. 1. Расчётная схема №1

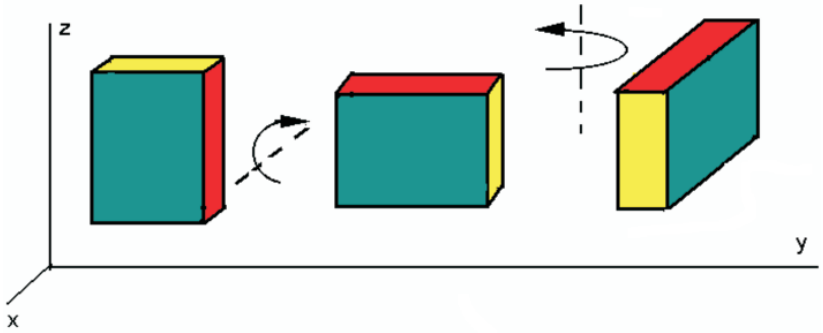

Рис. 2. Расчётная схема №2

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что конечное положение тела после двух поворотов зависит от их последовательности. Это и есть некоммутативность конечных поворотов. Из этого следует фундаментальное утверждение:*конечные повороты твердого тела не обладают ни свойствами чисел, ни свойствами векторов.*

Из теоремы Даламбера-Эйлера следует, что конечный поворот твердого тела с неподвижной точкой определяется четырьмя параметрами – углом конечного поворота и тремя направляющими косинусами оси конечного поворота. Угол конечного поворота обозначим через α, косинус угла между осью конечного поворота и осью *x* через *l*, косинус угла между